
SUR LES QUOTIENTS DISCRETS DE SEMI-GROUPES COMPLEXES

par

Christian Miebach

Résumé. — Soit $X = G/K$ un espace symétrique hermitien irréductible de type non-compact et soit $S \in G^{\mathbb{C}}$ le semi-groupe associé formé des compressions de X . Soit $\Gamma \subset G$ un sous-groupe discret. Nous donnons une condition suffisante pour que le quotient $\Gamma \backslash S$ soit une variété de Stein. En outre nous démontrons qu'en général $\Gamma \backslash S$ n'est pas de Stein ce qui réfute une conjecture de Achab, Betten et Krötz.

Introduction

Soit $X = G/K$ un espace symétrique hermitien irréductible de type non-compact et soit $S \in G^{\mathbb{C}}$ le semi-groupe associé consistant des compressions de X . On démontre dans [ABK04] que le quotient $\Gamma \backslash S$ est holomorphiquement séparable pour tout sous-groupe discret $\Gamma \subset G$. De plus, ils conjecturent que ce quotient est une variété de Stein et ils vérifient cette conjecture dans le cas où $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ et $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$.

Dans ce travail nous donnons une condition suffisante pour que $\Gamma \backslash S$ soit de Stein.

Théorème. — Soit $X = G/K$ un espace symétrique Hermitien irréductible de type non-compact et soit $S \in G^{\mathbb{C}}$ le semi-groupe associé formé des compressions de X . Soit $\Gamma \subset G$ un sous-groupe discret qui agit librement sur X . Si X/Γ est une variété de Stein, alors $\Gamma \backslash S$ est de Stein aussi.

Après avoir présenté les fondements nécessaires de la théorie des espaces symétriques hermitiens et des semi-groupes de compression dans la première section, nous démontrons ce théorème. Notre preuve utilise essentiellement le fibré $G^{\mathbb{C}} \rightarrow G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}} \rightarrow Z$ (où nous notons par Z le dual compact de X) et des techniques qui ont été développées dans [Mie08]. Dans la dernière section nous montrons que, si $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ et si G/Γ est compacte, alors $\Gamma \backslash S$ n'est pas de Stein ce qui réfute la conjecture générale dans [ABK04].

Je remercie Karl Oeljeklaus pour l'intérêt et l'aide qu'il a apporté à ce travail ainsi que pour l'invitation à LATP de l'Université de Provence où ce travail a été effectué.

1. Le semi-groupe de compression associé à un espace symétrique Hermitien

Dans cette section nous parcourons les parties de la théorie des espaces symétriques hermitiens non-compacts X dont nous avons besoin afin de définir le semi-groupe de compression associé à X . Pour en savoir plus nous prions le lecteur de s'adresser à [Hel01] et [HN93].

Soit $X = G/K$ un espace symétrique hermitien irréductible de type non-compact. Nous pouvons supposer que G est un groupe de Lie réel connexe simple sans facteurs compacts qui est plongé dans sa complexification universelle $G^{\mathbb{C}}$ et que K est un sous-groupe maximal compact de G qui est défini par l'involution de Cartan $\theta \in \text{Aut}(G)$. Nous dénotons par $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G par rapport à $\theta_* \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$. Puisque X est une variété complexe sur laquelle G agit par des transformations holomorphes, il y a une structure complexe J sur \mathfrak{p} invariante par l'action adjointe de K . Nous étendons J comme un opérateur \mathbb{C} -linéaire à $\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$. Puisque les valeurs propres de J sont $\pm i$, on obtient la décomposition en somme directe $\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{p}^-$. On peut démontrer que \mathfrak{p}^{\pm} est une sous-algèbre commutative de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ et $[\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{p}^{\pm}] \subset \mathfrak{p}^{\pm}$.

Soit $K^{\mathbb{C}}$ et P^{\pm} les sous-groupes analytiques de $G^{\mathbb{C}}$ dont l'algèbre de Lie est donnée par $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ et \mathfrak{p}^{\pm} . Alors $K^{\mathbb{C}}$ et P^{\pm} sont des sous-groupes fermés et complexes de $G^{\mathbb{C}}$. De plus, l'ensemble $Q^{\pm} := K^{\mathbb{C}}P^{\pm}$ est un sous-groupe fermé complexe parabolique et isomorphe au produit semi-direct $K^{\mathbb{C}} \ltimes P^{\pm}$. L'espace complexe homogène $Z := G^{\mathbb{C}}/Q^-$ peut être identifié au dual compact de X et l'application $X \rightarrow Z, gK \mapsto gQ^-$, définit un plongement holomorphe de X comme un ouvert de Z . Ce plongement est connu comme le plongement de Borel. Désormais nous regardons X comme l'orbite ouverte $G \cdot eQ^- \subset Z$.

Définition 1.1. — L'ensemble

$$S := \{g \in G^{\mathbb{C}}; g(\overline{X}) \subset X\}$$

s'appelle le semi-groupe ouvert complexe de compression associé à X .

Il suit immédiatement que S est un sous-ensemble ouvert et $(G \times G)$ -invariant de $G^{\mathbb{C}}$ où l'action de $G \times G$ est donnée par $z \mapsto g_1 z g_2^{-1}$. De plus, S est stable par rapport à la multiplication de $G^{\mathbb{C}}$ et par conséquent un semi-groupe. Ce semi-groupe de compression est un cas particulier d'un semi-groupe d'Ol'shanskii (comparer chapitre 8 dans [HN93]).

Théorème 1.2 ([Nee00]). — *Le semi-groupe de compression S est un domaine d'holomorphic hyperbolique au sens de Kobayashi dans $G^{\mathbb{C}}$. En particulier, le groupe $G \times G$ agit proprement sur S .*

Le quotient $\Gamma \backslash S$ est une variété complexe pour tout sous-groupe $\Gamma \subset G$ qui agit par multiplication de gauche sur S . Le théorème suivant est un cas particulier d'un résultat plus général de Achab, Betten et Krötz ([ABK04]).

Théorème 1.3. — *Soit Γ un sous-groupe discret de G .*

1. *La variété complexe $\Gamma \backslash S$ est holomorphiquement séparable.*
2. *Si G/Γ est compact, alors les fonctions holomorphes bornées séparent les points de $\Gamma \backslash S$, i. e. $\Gamma \backslash S$ est hyperbolique au sens de Caratheodory.*
3. *Si $G = \text{SL}(2, \mathbb{R})$ et si Γ est contenu dans $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$, alors $\Gamma \backslash S$ est une variété de Stein.*

La preuve de ce théorème utilise la théorie des représentations de S .

Enfin, nous notons l'observation suivante qui se trouve sans démonstration dans [BR01]. Pour l'aise du lecteur nous en donnons une démonstration. À l'égard de la théorie des ensembles réel-algébriques et semi-algébriques nous renvoyons le lecteur à [BCR98].

Lemme 1.4. — *Le semi-groupe S est un sous-ensemble semi-algébrique de $G^{\mathbb{C}}$.*

Démonstration. — Soit $A: G^{\mathbb{C}} \times Z \rightarrow Z \times Z$ l'application $(g, z) \mapsto (g \cdot z, z)$ et soit $p_{G^{\mathbb{C}}}: G^{\mathbb{C}} \times Z \rightarrow G^{\mathbb{C}}$ la projection sur la première composante. Il n'est pas difficile de montrer que l'on a:

$$G^{\mathbb{C}} \setminus S = p_{G^{\mathbb{C}}} (A^{-1}(Z \setminus X \times \overline{X})).$$

De plus il est bien connu que $G^{\mathbb{C}}$ porte une unique structure de groupe linéaire-algébrique et que $G^{\mathbb{C}}$ agit de façon algébrique sur la variété projective Z . Puisque G est réel-algébrique dans $G^{\mathbb{C}}$, le théorème de Tarski-Seidenberg implique que l'orbite $X = G \cdot eQ^-$ est semi-algébrique. Par conséquent, son complémentaire $Z \setminus X$ et son adhérence \overline{X} sont également semi-algébriques, donc $A^{-1}(Z \setminus X \times \overline{X})$ est semi-algébrique. Enfin, le théorème de Tarski-Seidenberg implique que $G^{\mathbb{C}} \setminus S$ et par conséquent S sont semi-algébriques. \square

2. Une condition suffisante pour que $\Gamma \backslash S$ soit de Stein

Nous continuons la notation établie dans la section précédente. La complexification de l'espace symétrique Hermitien $X = G/K$ est par définition la variété complexe homogène $X^{\mathbb{C}} := G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$. Puisque $K^{\mathbb{C}}$ est fermé dans $Q^- \cong K^{\mathbb{C}} \times P^-$ et puisque Q^- agit effectivement sur P^- , l'application naturelle $p: G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}} \rightarrow G^{\mathbb{C}}/Q^-$ est un fibré holomorphe dont la fibre est donnée par $P^- \cong \mathbb{C}^{\dim X}$ et dont le groupe structural est le groupe complexe connexe Q^- .

Il est connu que l'application $gK^{\mathbb{C}} \mapsto (gQ^-, gQ^+)$ est un plongement ouvert de $X^{\mathbb{C}}$ dans $G^{\mathbb{C}}/Q^- \times G^{\mathbb{C}}/Q^+$. Il s'ensuit que nous obtenons que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}} & \longrightarrow & G^{\mathbb{C}}/Q^- \times G^{\mathbb{C}}/Q^+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ G^{\mathbb{C}}/Q^- & \longrightarrow & G^{\mathbb{C}}/Q^- \end{array}$$

est commutatif.

Soit $\pi: G^{\mathbb{C}} \rightarrow G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ le fibré principal de groupe structural $K^{\mathbb{C}}$. Nous commençons par montrer que l'image $\pi(S)$ est une variété de Stein. Un théorème de Matsushima et Morimoto assure que $\pi(S)$ est de Stein si et seulement si $SK^{\mathbb{C}}$ est de Stein.

Proposition 2.1. — *Le domaine $SK^{\mathbb{C}} \subset G^{\mathbb{C}}$ est de Stein. Par conséquent, $\pi(S) \subset G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ est de Stein.*

Démonstration. — Puisque S est invariant par rapport à la multiplication à droite de K , on obtient une action holomorphe locale par $K^{\mathbb{C}}$ sur S . Par [Hei91] il y a une variété de Stein S^* munie d'une action holomorphe de $K^{\mathbb{C}}$ et un plongement ouvert holomorphe K -equivariant $\varphi: S \rightarrow S^*$ tel que $S^* = K^{\mathbb{C}} \cdot \varphi(S)$. De plus, S^* est universel ce qui implique l'existence d'une application holomorphe $K^{\mathbb{C}}$ -equivariante $\Phi: S^* \rightarrow SK^{\mathbb{C}}$ tel que $\Phi \circ \varphi$ coïncide avec l'inclusion $S \hookrightarrow SK^{\mathbb{C}}$. Il s'en suit que Φ est surjectif et localement biholomorphe. Donc il suffit de montrer que Φ est une application finie. Dans notre situation c'est le cas si et seulement si les fibres de Φ sont finies.

Pour $z_0 \in S$ nous définissons l'ensemble

$$K^{\mathbb{C}}[z_0] := \{k \in K^{\mathbb{C}}; z_0 k^{-1} \in S\}.$$

Or, S est semi-algébrique par Lemme 1.4 et $K^{\mathbb{C}}$ est un groupe linéaire algébrique, donc $K^{\mathbb{C}}[z_0]$ est semi-algébrique. En particulier, le nombre de composantes connexes de $K^{\mathbb{C}}[z_0]$ est fini.

Nous allons démontrer que $\#\Phi^{-1}(z_0)$ est borné par le nombre de composantes connexes de $K^{\mathbb{C}}[z_0]$.

Soit $z \in \Phi^{-1}(z_0)$. Alors il y a un élément $k \in K^{\mathbb{C}}$ tel que $k \cdot z \in \varphi(S)$. Par conséquent, nous avons $\Phi(k \cdot z) = k \cdot \Phi(z) = z_0 k^{-1} \in S$, i.e. $k \in K^{\mathbb{C}}[z_0]$. Comme $\Phi|_{\varphi(S)}: \varphi(S) \rightarrow S$ est biholomorphe, nous concluons $k \cdot z = \varphi(z_0 k^{-1})$, ce qui est équivalent à $z = k^{-1} \cdot \varphi(z_0 k^{-1})$. Comme réciproquement tout élément $z \in S^*$ de la forme $z = k^{-1} \cdot \varphi(z_0 k^{-1})$ avec $k \in K^{\mathbb{C}}[z_0]$ est contenu dans $\Phi^{-1}(z_0)$, nous obtenons une application surjective

$$(2.1) \quad K^{\mathbb{C}}[z_0] \rightarrow \Phi^{-1}(z_0), \quad k \mapsto k^{-1} \cdot \varphi(z_0 k^{-1}).$$

Si $k \in K^{\mathbb{C}}[z_0]$ est contenu dans la composante connexe de l'élément neutre, nous avons $\varphi(z_0 k^{-1}) = k \cdot \varphi(z_0)$. Cette observation implique que l'application (2.1) est localement constante, ce qui montre la proposition. \square

Remarque. — La variété S^* est la globalisation universelle de la $K^{\mathbb{C}}$ -action locale sur S au sens de [Pal57].

La proposition 2.1 nous permet de donner la condition équivalente suivante pour que $\Gamma \backslash S$ soit de Stein.

Proposition 2.2. — Soit $\Gamma \subset G$ un sous-groupe discret. Alors $\Gamma \backslash S$ est de Stein si et seulement si $\Gamma \backslash \pi(S)$ est de Stein.

Démonstration. — Si $\Gamma \backslash S$ est de Stein, alors la globalisation universelle $\Gamma \backslash S^*$ de la $K^{\mathbb{C}}$ -action locale sur $\Gamma \backslash S$ est aussi de Stein. Comme $K^{\mathbb{C}}[\Gamma g] = K^{\mathbb{C}}[g]$ pour tout $g \in S$, le même argument qu'au-dessus implique que $\Gamma \backslash SK^{\mathbb{C}}$ est de Stein, ce qui montre que $\Gamma \backslash \pi(S)$ est de Stein.

Réciproquement, si $\Gamma \backslash \pi(S)$ est de Stein, alors $\Gamma \backslash SK^{\mathbb{C}}$ est aussi de Stein. Puisque $\Gamma \backslash S$ est plongé comme ouvert dans $\Gamma \backslash SK^{\mathbb{C}}$ et localement de Stein, l'affirmation découle d'un argument à la Docquier-Grauert (comparer Proposition 4.7 dans [Mie08]). \square

Soit $p: G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}} \rightarrow G^{\mathbb{C}}/Q^-$ le fibré holomorphe et considérons $X \subset G^{\mathbb{C}}/Q^-$.

Lemme 2.3. — On a $\pi(S) \subset p^{-1}(X)$.

Démonstration. — Soit $g \in S$. Comme les applications π and p sont $G^{\mathbb{C}}$ -equivariantes, nous en déduisons que $p \circ \pi(g) = g \cdot p \circ \pi(e) = g \cdot eQ^-$. À cause de $eQ^- \in X$, la définition de S implique que $gQ^- \in X$. \square

La restriction $p: p^{-1}(X) \rightarrow X$ est un fibré holomorphe de fibre P^- et de groupe structural complexe connexe Q^- . De plus, le groupe G agit par des automorphismes de fibré sur $p^{-1}(X)$.

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour que $\Gamma \backslash S$ soit de Stein.

Théorème 2.4. — Soit $\Gamma \subset G$ un sous-group discret qui agit librement sur X . Si X/Γ est de Stein, alors $\Gamma \backslash S$ est également de Stein.

Démonstration. — Comme le groupe Γ agit par automorphismes de fibré, nous obtenons le fibré holomorphe $\Gamma \backslash p^{-1}(X) \rightarrow X/\Gamma$ (comparer Proposition 6.1 dans [Mie08]). Comme X/Γ est de Stein, la fibre P^- est de Stein, et le groupe structural de ce fibré est complexe connexe, nous en déduisons que $\Gamma \backslash p^{-1}(X)$ est de Stein. Puisque $\pi(S)$ est de Stein et $\Gamma \backslash \pi(S)$ est un ouvert dans $\Gamma \backslash p^{-1}(X)$, nous concluons que $\Gamma \backslash \pi(S)$ est de Stein et donc que $\Gamma \backslash S$ est de Stein. \square

- Exemple.** — 1. Soit $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ et soit $\Gamma \subset G$ un sous-groupe discret qui agit librement sur le demi-plan supérieur \mathbb{H} tel que la surface de Riemann $R := \mathbb{H}/\Gamma$ est non-compacte. Dans ce cas R est de Stein, donc le quotient $\Gamma \backslash S$ est de Stein aussi. Cette observation donne une nouvelle démonstration du Théorème 1.3 (3).
2. Si $X = G/K$ est un espace symétrique hermitien arbitraire de type non-compact et si $\Gamma \subset G$ et cyclique, alors X/Γ et donc $\Gamma \backslash S$ sont de Stein par [Mie08].

3. Un contre-exemple

Dans cette section nous considérons l'exemple explicite du disque $X = \Delta = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$. Le dual compact de X est donné par $Z = \mathbb{P}_1$ et nous avons

$$\Delta \cong \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{P}_1; |z_0|^2 - |z_1|^2 < 0\} \cong G/K$$

pour $G = \mathrm{SU}(1, 1)$ et $K = \left\{ \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R} \right\} \cong S^1$.

On vérifie que $P^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc, nous pouvons identifier $G^\mathbb{C}/Q^- \times G^\mathbb{C}/Q^+$ avec $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ où le point (eQ^-, eQ^+) correspond à $([0 : 1], [1 : 0])$. De plus, nous identifions la complexification $X^\mathbb{C} = G^\mathbb{C}/K^\mathbb{C}$ avec la $G^\mathbb{C}$ -orbite ouverte de (eQ^-, eQ^+) , i.e. avec $(\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1) \setminus D$ où nous notons par D la diagonale dans $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$. Par conséquent, $p^{-1}(\Delta) = (\Delta \times \mathbb{P}_1) \setminus D$ contient les domaines G -invariants $(\Delta \times \Delta) \setminus D$ et $\Delta \times (\mathbb{P}_1 \setminus \overline{\Delta})$ qui sont de Stein tous les deux. Le groupe G agit librement et transitivement sur leur frontière $F := \Delta \times S^1$ qui est alors une hypersurface Levi-plate dans $p^{-1}(\Delta)$.

Lemme 3.1. — *Le domaine $\pi(S)$ contient l'hypersurface Levi-plate F .*

Démonstration. — On vérifie directement que pour $t > 0$ l'élément $\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$ est contenu dans $S \cap K^\mathbb{C}$. Comme la matrice $\begin{pmatrix} 1+ix & -ix \\ ix & 1-ix \end{pmatrix}$ se trouve dans $G = \mathrm{SU}(1, 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, leur produit est contenu dans S . L'orbite par ce produit du point $([0 : 1], [1 : 0])$ est donnée par

$$([-ie^{-t}x : e^t(1-ix)], [e^{-t}(1+ix) : ie^tx]).$$

Un calcul simple montre que pour le choix $x = 1$ et $t = \frac{1}{4} \log(2)$ cet élément est contenu dans F . En utilisant la multiplication à gauche par G l'affirmation est démontrée. \square

Proposition 3.2. — *Si G/Γ est compact, alors le quotient $\Gamma \backslash S$ n'est pas de Stein.*

Démonstration. — Par la proposition 2.2 le quotient $\Gamma \backslash S$ est de Stein si et seulement si $\Gamma \backslash \pi(S)$ est de Stein. Nous avons vu que $\pi(S)$ contient une hypersurface G -invariante Levi-plate F ce qui implique que $\Gamma \backslash \pi(S)$ contient la hypersurface compacte Levi-plate $\Gamma \backslash F$. Soit f une fonction holomorphe arbitraire sur $\Gamma \backslash \pi(S)$ et soit $z \in \Gamma \backslash F$ un point dans lequel la norme absolue de la restriction de f sur $\Gamma \backslash F$ prend son maximum. Comme $\Gamma \backslash F$ est Levi-plate, il y a une feuille holomorphe qui passe par z . Le principe du maximum implique que f doit être constante sur cette feuille. Nous en déduisons que les points de cette feuille ne peuvent pas être séparés par les fonctions holomorphes, i.e. que $\Gamma \backslash \pi(S)$ n'est pas holomorphiquement séparable, et en particulier, pas de Stein. \square

Références

- [ABK04] D. ACHAB, F. BETTEN & B. KRÖTZ – “Discrete group actions on Stein domains in complex Lie groups”, *Forum Math.* **16** (2004), no. 1, p. 37–68.

- [BCR98] J. BOCHNAK, M. COSTE & M.-F. ROY – *Real algebraic geometry*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 36, Springer-Verlag, Berlin, 1998, Translated from the 1987 French original, Revised by the authors.
- [BR01] B. E. BRECKNER & W. A. F. RUPPERT – “On asymptotic behavior and rectangular band structures in $SL(2, \mathbb{R})$ ”, *J. Lie Theory* **11** (2001), no. 2, p. 559–604.
- [Hei91] P. HEINZNER – “Geometric invariant theory on Stein spaces”, *Math. Ann.* **289** (1991), no. 4, p. 631–662.
- [Hel01] S. HELGASON – *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 34, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, Corrected reprint of the 1978 original.
- [HN93] J. HILGERT & K.-H. NEEB – *Lie semigroups and their applications*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1552, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [Mie08] C. MIEBACH – “Quotients of bounded homogeneous domains by cyclic groups”, 2008, arxiv:math.CV/0803.4476v1.
- [Nee00] K.-H. NEEB – *Holomorphy and convexity in Lie theory*, de Gruyter Expositions in Mathematics, vol. 28, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2000.
- [Pal57] R. S. PALAIS – “A global formulation of the Lie theory of transformation groups”, *Mem. Amer. Math. Soc. No.* **22** (1957), p. iii+123.

22 Avril 2008

CHRISTIAN MIEBACH, Fakultät für Mathematik, Ruhr-Universität Bochum, Universitätsstraße 150, D - 44780 Bochum • E-mail: christian.miebach@ruhr-uni-bochum.de • Adresse actuelle: Centre de Mathématiques et d’Informatique, UMR-CNRS 6632 (LATP), 39, rue Joliot-Curie, Université de Provence, 13453 Marseille Cedex 13 France